1. Bài toán vận tải cân bằng thu phát

1.1 Khái niệm

1.1.1 Mô hình thực tế

Một doanh nghiệp có 30 tấn hàng trong kho q.4 và 50 tấn hàng trong kho Tân Bình, muốn chở 12 tấn cửa hàng q.1, 28 tấn ra q.3, 40 tấn ra Tân Bình. Chi phí vận chuyển (chục ngàn/tấn hàng):

Kho \ Cửa hàng	q.1	q.3	q.TB
q.4	4	6	9
q.TB	7	5	1

Vận chuyển sao cho tổng chi phí thấp nhất?

Có 2 kho và 3 cửa hàng. Gọi x_{ij} là số tấn hàng chở từ kho i sang cửa hàng j. $x_{ij} \geq 0 \ (i = \overline{1,2}; j = \overline{1,3})$.

Tổng chí phí vận chuyển (yêu cầu cực tiểu):

$$f(X) = 4x_{11} + 6x_{12} + 9x_{13} + 7x_{21} + 5x_{22} + x_{23} \to \min$$

Do tổng số hàng trong kho (80) bằng tổng số hàng các cửa hàng cần nhận (**Cân bằng thu phát - CBTP**) nên mỗi kho phải phát hết và mỗi cửa hàng phải nhận đủ:

Kho 1 phát hết hàng: $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 30$

Kho 2 phát hết hàng: $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50$

Cửa hàng 1 nhận đủ hàng: $x_{11} + x_{21} = 12$

Cửa hàng 2 nhận đủ hàng: $x_{12} + x_{22} = 28$

Cửa hàng 3 nhận đủ hàng: $x_{13} + x_{23} = 40$

Vậy ta có bài toán QHTT sau:

$$f(X) = 4x_{11} + 6x_{12} + 9x_{13} + 7x_{21} + 5x_{22} + x_{23} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 30 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50 \\ x_{11} + x_{21} = 12 \\ x_{12} + x_{22} = 28 \\ x_{13} + x_{23} = 40 \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1,2}; j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

1.1.2 Tổng quát hoá

Có m kho hàng, kho i có a_i đơn vị hàng.

Có n cửa hàng, hàng j cần nhận b_j vị hàng.

Giả sử điều kiện Cân bằng thu phát (**CBTP**) được thoả: tổng số hàng trong kho bằng tổng số hàng cửa hàng cần nhận ($\Sigma a_i = \Sigma b_j$).
Đơn giá vận chuyển từ kho i đến cửa hàng j là c_{ij}, số đơn vị hàng chuyên chở là x_{ij}. $(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$.
Tìm cách vận chuyển có tổng chi phí thấp nhất?

Nhận xét Bài toán vận tải CBTP là bài toán QHTT chính tắc. Mỗi PA là ma trận $m \times n$.
Số ràng buộc: $m+n$, số biến: $m \times n$, số ràng buộc ĐLTT: $m + n - 1$.

Bài toán xác định khi biết véctơ $\mathbf{A} = (a_1, a_2, ..., a_m)$, véctơ $\mathbf{B} = (b_1, b_2, ..., b_n)$, ma trận $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times n}$.

1.1.3 Dạng bảng vận tải

Bài toán còn viết dưới dạng bảng vận tải sau:

	b_1	b_2	...
a_1	c_{11} $\boxed{x_{11}}$	c_{12}	
a_2	c_{21}	c_{22}	
...			

Các giá trị $x_{ij} > 0$ được ghi vào ô (i, j).

Nếu ô (i, j) không ghi giá trị x_{ij} nghĩa là $x_{ij} = 0$.

1.2 Tính chất của bảng vận tải

1.2.1 Vòng và tập ô chứa vòng

Trên bảng vận tải gồm m dòng, n cột ta chọn ra một số ô khác nhau đôi một và sắp thứ tự thành một dãy ô. Dãy ô được gọi là:

* **Vòng** nếu có ít nhất 4 ô, trên dòng hay cột của bảng có không quá 2 ô thuộc dãy, hai ô liên tiếp thuộc dãy thì chung dòng hoặc chung cột, ô đầu tiên và ô cuối cùng thuộc dãy chung dòng hoặc chung cột.

* **Tập ô chứa vòng** nếu trích ra được 1 vòng từ các ô thuộc dãy.

o	o		o	o	o	o
o	o				o	
					o	o
o		o		o	o	
o		o	o			o
					o	o

o o o : vòng o : tập ô chứa vòng.

o	o			
o		o	o	
		o		
	o		o	o

Tìm vòng: Bỏ đi các ô treo (các ô trên dòng hay cột không có ô khác thuộc tập ô).

1.2.2 Tính chất

* Số ô nhiều nhất của một tập ô không chứa vòng là m+n–1.

* H không chứa vòng gồm m+n–1 ô. Thêm vào H một ô thì sẽ có duy nhất một vòng đi qua ô này.

1.3 PACB

1.3.1 Bài toán vận tải CBTP có PACB được xây dựng theo **phương pháp chi phí thấp nhất**:

B1 Chọn (i, j) là ô có c_{ij} nhỏ nhất (trên/phải).

B2 Đặt $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$. Cập nhật a_i, b_j (trừ đi x_{ij}).

B3 Đánh dấu xoá dòng, cột nào hết hàng.

B4 Nếu có ô chưa có dấu xoá thì quay lại B1.

***VD* Bài toán vận tải I** $A = (35, 65, 25)$

$$B = (15, 20, 25, 30, 35) \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 5 & 8 & 4 & 7 \\ 7 & 9 & 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Do 35+65+25 = 125 = 15+20+25+30+35 nên đây là bài toán CBTP. Dùng phương pháp chi phí thấp nhất ta có PACB xuất phát:

4 $\boxed{15}$	6	7	8	6 $\boxed{20}$
6	5 $\boxed{20}$	8	4 $\boxed{30}$	7 $\boxed{15}$
7	9	9 $\boxed{25}$	6	8

1.3.2 *Định lý*

Bài toán vận tải CBTP luôn luôn có PATU.

1.3.3 Định nghĩa

Xét X là PACB.

* Các ô có $x_{ij} > 0$ được gọi là các **ô chọn**.

* Nếu số lượng ô chọn chưa đủ m+n–1 thì sẽ thêm các **ô chọn giả** cho đủ. Ô chọn giả có lượng hàng bằng 0 và được chọn tại các vị trí sao cho khi thêm vị trí này vào tập ô chọn và ô chọn giả đã có thì tập ô có được không có vòng.

* Các ô còn lại là **ô loại**.

VD **Bài toán vận tải I**

4 $\boxed{15}$	6	7 $\boxed{0}$	8	6 $\boxed{20}$
6	5 $\boxed{20}$	8	4 $\boxed{30}$	7 $\boxed{15}$
7	9	9 $\boxed{25}$	6	8

2. Thuật giải bài toán CBTP

Xét X là PACB, H là tập ô chọn và ô chọn giả.

Các **thế vị** là các số u_i, v_j $(i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n})$ thoả hệ phương trình: $v_j - u_i - c_{ij} = 0 \quad \forall(i, j)\in H$

Các **ước lượng** là các số:

$$\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij} \quad \forall(i, j)\notin H$$

Ghi chú

* Số lượng ẩn trong hệ phương trình xác định thế vị là m+n trong khi số phương trình là m+n–1. Vậy ta có thể cho một thế vị một giá trị tuỳ ý rồi tính các thế vị còn lại.

* Thực tế, ta chọn cột hay dòng nào có nhiều ô chọn nhất (trên dưới) rồi cho thế vị tương ứng bằng 0.

* Nếu biết thế vị dòng thì dò trên dòng, tìm ô chọn, ta tính được thế vị trên cột ứng với ô chọn vừa có.

Nếu biết thế vị cột thì dò trên cột, tìm ô chọn, ta tính được thế vị trên dòng ứng với ô chọn vừa có.

VD **Bài toán vận tải I**

4 $\boxed{15}$	6	7 $\boxed{0}$	8	6 $\boxed{20}$	0
6	5 $\boxed{20}$	8	4 $\boxed{30}$	7 $\boxed{15}$	-1
7	9	9 $\boxed{25}$	6	8	-2
4	4	7	3	6	

Căn cứ trên các giá trị Δ ta có 2 trường hợp sau:

Định Lý (Trường hợp 1)

Nếu $\Delta_{ij} \leq 0 \ \forall(i, j)$ thì PACB đang xét là PATU.

VD **Bài toán vận tải I**

Tại mỗi ô loại, ta tính ước lượng và thấy không có ước lượng nào là số dương. Vậy:

Do $\Delta_{ij} \leq 0 \ \forall(i, j)$ thì PACB đang xét là PATU:

$$X_{min} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 & 30 & 15 \\ 15 & 0 & 25 & 10 & 0 \end{pmatrix} \qquad f_{min} = 4\times15 + \ldots = 730$$

VD **Bài toán vận tải II** $A = (36, 65, 25)$

$$B = (15, 20, 26, 30, 35) \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 8 & 6 \\ 6 & 5 & 8 & 4 & 7 \\ 7 & 9 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Định lý (Trường hợp 2b)

Nếu có $\Delta_{ij} > 0$ thì ta thành lập được PACB mới. PACB mới có bảng Vận tải được suy ra từ bảng Vận tải cũ như sau:

* Chọn (r, s) là ô có Δ_{ij} lớn nhất.

* Thêm ô (r, s) vào H, tìm vòng. Đánh dấu + vào ô (r, s) rồi xem kẻ +, – trên vòng.

* Gọi θ_o là giá trị x_{ij} nhỏ nhất trong các ô mang dấu –. Chọn một ô mang dấu – có x_{ij} bằng θ_o làm ô (g, h).

* Lập bảng Vận tải mới, chép lại tất cả c_{ij}, tất cả x_{ij} không thuộc vòng.

* Các ô + được cộng thêm θ_o còn ô – được trừ đi θ_o vào x_{ij} rồi ghi vào vị trí tương ứng trong bảng mới.

Chú thích

* Trong bảng mới thì ô (r, s) trở thành ô chọn còn ô (g, h) trở thành ô loại. Lưu ý:

(+) 2	(–) 1
(–) 1	(+)

3	0
	1

(+) 2	(–) 0
(–) 1	(+)

3	
1	0

* Độ giảm hàm mục tiêu là $\theta_o\Delta_{rs}$.

_VD_ Bài toán vận tải II

4 15	6	8	8	6 21	1
6	5 20	8 (+) 1	4 30	7 (–) 14	0
7	9	9 (–) 25	6	7 (1) (+)	-1
5	5	8	4	7	B.1

4 15	6	8	8	6 21	0
6	5 20	8 15	4 30	7	0
7	9	9 11	6	7 14	-1
4	5	8	4	6	B.2

$$X_{min} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 20 & 15 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 14 \end{pmatrix} \qquad f_{min} = 723$$

Vấn đề duy nhất PATU

Xét bảng vận tải cuối.

* Nếu tất cả Δ_{ij} trên các ô loại đều là số âm thì PATU là duy nhất.

* Nếu tìm ô loại (i, j) có $\Delta_{ij} = 0$ thì ta xem ô này là (r, s), lập tiếp bảng vận tải và nếu có PACB mới thì đây là PATU khác của bài toán.

3. Các dạng khác của bài toán vận tải

3.1 Bài toán không CBTP

* **Kho nhiều hàng hơn** thêm cửa hàng giả nhận lượng hàng bằng mức chênh lệch. Đơn giá vận chuyển đến cửa hàng giả bằng 0. Lúc này bài toán

trở thành CBTP. Giải bình thường. Khi đáp số thì bỏ đi cửa hàng giả.

Thực tế, kho nào phát vào cửa hàng giả nghĩa là còn hàng trong kho.

* **Kho ít hàng hơn** thêm cửa kho giả có lượng hàng bằng mức chênh lệch. Đơn giá vận chuyển từ kho giả bằng 0. Lúc này bài toán trở thành CBTP. Giải bình thường. Khi đáp số thì bỏ đi kho giả.

Thực tế, cửa hàng nào nhận từ kho giả nghĩa là bị thiếu hàng.

Chú thích

Khi một cột hay một dòng của bài toán vận tải cân bằng thu phát có các hệ số c_{ij} bằng nhau thì khi phân phối hàng theo phương pháp chi phí thấp nhất, ta sẽ tạm bỏ qua cột hay dòng này, đến bước phân phối hàng cuối cùng mới dùng đến. Thực tế sẽ cho thấy khi sử dụng nhận xét trên thì số bảng vận tải khi giải bài toán sẽ ít đi.

VD **Bài toán vận tải III** $A = (22, 28, 29, 32)$

$$B = (20, 26, 28, 30) \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 14 & 7 & 20 \\ 4 & 15 & 8 & 20 \\ 6 & 12 & 6 & 18 \\ 3 & 11 & 9 & 19 \end{pmatrix}$$

Do $22+28+29+32=111 > 20+26+28+30=104$ nên đây là bài toán vận tải mà kho có nhiều hàng hơn. Để chuyển về dạng cân bằng thu phát, ta lập thêm một cửa hàng giả nhận lượng hàng dư ra là $111 - 104 = 7$. Chi phí vận chuyển một đơn vị hàng từ mọi kho ra cửa hàng giả đều bằng 0.

Xét bài toán cân bằng thu phát. Dùng phương pháp chi phí thấp nhất để thành lập phương án cực biên xuất phát rồi giải tiếp, ta có các bảng vận tải sau:

2 20	14	7 (1) (+)	20 (–) 2	0	-20
4	15	8	20 21	0 7	-20
6	12	6 (–) 28	18 (+) 1	0	-18
3	11 26	9	19 6	0	-19
-18	-8	-12	0	-20	B.1

2 [20]	14	7 [2]	20	0	-19
4	15	8	20 [21]	0 [7]	-20
6	12	6 [26]	18 [3]	0	-18
3	11 [26]	9	19 [6]	0	-19
-17	-8	-12	0	-20	B.2

Do $\Delta_{ij} \leq 0 \ \forall(i, j)$ nên PACB đang xét là PATU. Bỏ đi cột cuối ứng với cửa hàng giả, ta có:

$$X_{min} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 26 & 3 \\ 0 & 26 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad f_{min} = 1.084$$

3.2 Bài toán có ô cấm

Trong thực tế, có thể kho i không được phát đến cửa hàng j. Lúc này ta nói (i, j) là ô cấm.

Nếu (i, j) là ô cấm thì ta điều chỉnh c_{ij} thành M (M là tham số dương đủ lớn).

Giải bài toán với tham số M. Nếu PATU của bài toán M có lượng hàng dương tại một trong các ô cấm thì bài toán xuất phát vô nghiệm do không có PA. Ngược lại thì PATU của bài toán M cũng chính là PATU của bài toán xuất phát.

VD **Bài toán vận tải IV**

(2, 4) là ô cấm. $A = (14, 14, 60)$

$$B = (20, 18, 31, 19) \qquad C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 12 & 14 \\ 11 & 6 & 15 & 6 \\ 12 & 5 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Do (2, 4) là ô cấm nên ta chỉnh c_{24} thành M (tham số dương đủ lớn).

Do 14+14+60=88 = 20+18+31+19 nên bài toán vận tải M là bài toán CBTP.

9 14	7 (M–16)	12 (M–16)	14 (M–16)	–M+14
11 6	6 (M–13) **(+)**	15 (M–17)	M **(–)** 8	–M+12
12	5 **(–)** 18	10 31	12 **(+)** 11	0
–M+23	5	10	12	B.1

9 14	7	12	14	1
11 6	6 8	15	M	-1
12	5 10	10 31	12 19	0
10	5	10	12	B.2

Do $\Delta_{ij} \leq 0$ $\forall(i, j)$ nên PACB đang xét là PATU của bài toán M. Do không phân phối hàng vào ô cấm nên PA này cũng là PATU của bài toán xuất phát. Ta có:

$$X_{min} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 31 & 19 \end{pmatrix} \qquad f_{min} = 828$$

3.3 Bài toán phát hết - thu đủ

* Kho nhiều hàng và yêu cầu kho i phát hết: Kho i không được phát vào cửa hàng giả. Vậy ô ứng với kho i và cửa hàng giả là ô cấm.

* Kho ít hàng và yêu cầu cửa hàng j nhận đủ: Cửa hàng j không được nhận hàng từ kho giả. Vậy ô ứng với kho giả và cửa hàng j là ô cấm.

***VD* Bài toán vận tải V**

Kho 1 và kho 2 phát hết. $A = (150, 100, 145, 100)$

$$B = (140, 150, 180) \qquad C = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 6 \\ 10 & 5 & 9 \\ 14 & 10 & 12 \\ 9 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

Do kho nhiều hàng hơn nên ta thêm một cửa hàng giả (cửa hàng 4) nhận lượng hàng chênh lệch là 25. Theo điều kiện kho thứ 1 và thứ 2 phải phát hết hàng, ô (1, 4) và (2, 4) sẽ là ô cấm. Vậy, ta điều chỉnh c_{14} và c_{24} thành M (số dương đủ lớn).

15	10	6 150	M	6
10	5 100	9	M	7
14 **(–)** 90	10 (2) **(+)**	12 30	0 25	0
9 **(+)** 50	7 **(–)** 50	14	0	5
14	12	12	0	

15	10	6 150	M	6
10	5 100	9	M	5
14 40	10 50	12 30	0 25	0
9 100	7	14	0	5
14	10	12	0	

Do $\Delta_{ij} \leq 0$ $\forall(i, j)$ nên PACB đang xét là PATU của bài toán M. Do không phân phối hàng vào ô cấm nên phương án này cũng là PATU của bài toán có ô cấm. Bỏ đi cửa hàng giả, ta có:

$$X_{min} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 150 \\ 0 & 100 & 0 \\ 40 & 50 & 30 \\ 100 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad f_{min} = 3.720$$

3.4 Bài toán vận tải max

Đổi dấu tất cả c_{ij} để chuyển về bài toán min.